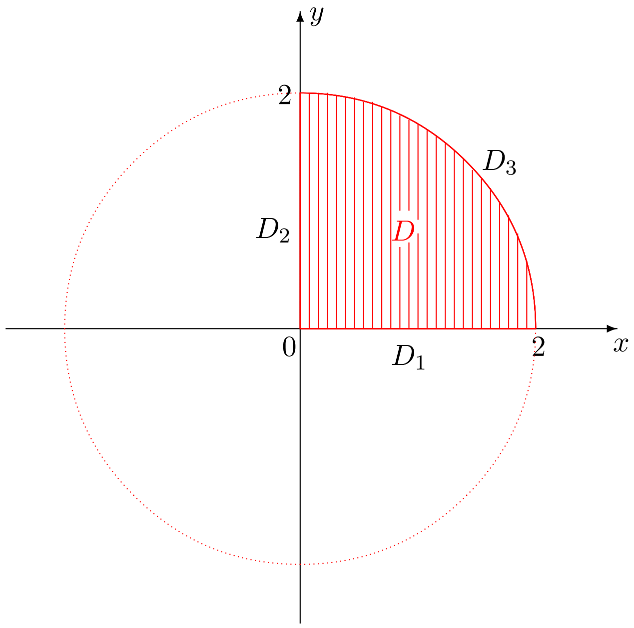
MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 4
11.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Die Menge
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$
besteht aus genau denjenigen Punkte der abgeschlossenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$ mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius 2, welche im abgeschlossenen 1. Quadranten $x \geq 0$ und $y \geq 0$ liegen; damit ergibt sich folgende Skizze:



Damit ist D eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, mithin kompakt. Folglich besitzt die (als Polynomfunktion insbesondere) stetige Funktion
$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\left(x^2 + y^2 - 1\right) - \frac{1}{2}y^2,$$
nach dem Satz von Weierstraß (mindestens) eine globale Minimalstelle und (mindestens) eine globale Maximalstelle.

- Wir untersuchen f auf dem Rand ∂D:

  * Wir parametrisieren die untere Seite D_1 von ∂D durch
  $$\varphi : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t,0).$$

Die Funktionswerte von f auf D_1 sind dann gegeben durch

$$h(t) := f(\varphi(t)) = f(t,0) = t \cdot (t^2-1) = t^3 - t, \quad t \in [0,2].$$

h ist differenzierbar mit

$$h'(t) = 3t^2 - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{\sqrt{3}} \ \vee \ t = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\notin[0,2]}$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind also $\quad t = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 2.$

$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf D_1 sind also

$$(x,y) = (0,0) \ , \ (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0) \ , \ (2,0).$$

* Wir parametrisieren die linke Seite D_2 von ∂D durch

$$\varphi : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (0,t).$$

Die Funktionswerte von f auf D_2 sind dann gegeben durch

$$h(t) := f(\varphi(t)) = f(0,t) = -\frac{1}{2}t^2, \quad t \in [0,2].$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind also $\quad t = 0, \quad 2.$

$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf D_2 sind also

$$(x,y) = (0,0) \ , \ (0,2).$$

* Wir parametrisieren den Kreisbogen D_3 von ∂D durch

$$\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (2\cos t, 2\sin t).$$

Die Funktionswerte von f auf D_3 sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} h(t) := f(\varphi(t)) = f(2\cos t, 2\sin t) &= 2\cos t \cdot (4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 1) - \frac{1}{2} 4 \sin^2 t \\ &= 2\cos t \cdot (4-1) - 2\sin^2 t \\ &= 6\cos t - 2\sin^2 t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

h ist differenzierbar mit

$$h'(t) = -6\sin t - 4\sin t \cos t \ = \ \sin t \underbrace{(-6 - 4\cos t)}_{<0} = 0 \iff \sin t = 0 \overset{t\in[0,\frac{\pi}{2}]}{\iff} t = 0.$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind also $\quad t = 0, \quad \frac{\pi}{2}.$

$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf D_3 sind also

$$(x,y) = (2,0) \ , \ (0,2).$$

- Wir untersuchen f auf dem Innern $\overset{\circ}{D}$:

f ist auf $\overset{\circ}{D}$ partiell diffbar, also sind nur $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$ mit $\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0)$ Kandidaten für eine lokale Extremstelle von f auf $\overset{\circ}{D}$.

Es ist für $(x,y) \in \overset{\circ}{D}$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2+y^2-1, 2xy-y) = (0,0) &\iff 3x^2+y^2-1=0 \ \wedge\ y(2x-1)=0 \\ &\overset{y>0}{\iff} (x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Damit ist der einzige Kandidat für ein lokales Extremum auf $\overset{\circ}{D}$ der Punkt

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- Wir vergleichen $f(x,y)$ für die Kandidaten:

  Mit Hilfe der Wertetabelle

(x,y)	$(0,0)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	$(2,0)$	$(0,2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$f(x,y)$	0	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	7	-2	$-\frac{3}{8}$

  erkennt man, daß $(0,2)$ die einzige (globale) Minimalstelle von f [mit Wert -2], und $(2,0)$ die einzige (globale) Maximalstelle von f [mit Wert 7] ist.

2. Die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y^4 - 3\,x\,y^2 + x^3,$$

ist (als Polynomfunktion vierten Grades) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(-3\,y^2 + 3\,x^2,\ 4\,y^3 - 6\,x\,y\right),$$

und weiter

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x & -6\,y \\ -6\,y & 12\,y^2 - 6\,x \end{pmatrix}.$$

Als lokale Extrema der auf ganz $\mathbb{R}^2$ definierten und partiell differenzierbaren Funktion f kommen lediglich ihre kritischen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, also die Nullstellen von $\operatorname{grad} f$ in Frage; es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \quad &\iff \quad -3y^2 + 3x^2 = 0 \quad \wedge \quad 4y^3 - 6xy = 0 \\ &\iff \quad y^2 = x^2 \quad \wedge \quad 2y^3 = 3xy \\ &\iff \quad x = \pm y \quad \wedge \quad 2y^3 = 3xy \end{aligned}$$

- Für $x = y$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung

$$2x^3 = 3x^2, \qquad \text{also} \qquad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{3}{2},$$

  und damit

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{oder} \quad (x,y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

- Für $x = -y$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung

$$-2x^3 = -3x^2, \qquad \text{also wieder} \qquad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{3}{2},$$

  und damit

$$(x,y) = (0,0) \quad \text{oder} \quad (x,y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Damit kommen als kritische Punkte von f nur die drei Punkte

$$(0,0), \quad \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

in Frage ... und durch Einsetzen in $\operatorname{grad} f(x,y)$ sieht man auch sofort, daß diese Punkte in der Tat auch Nullstellen des Gradienten von f, also kritische Punkte sind. Damit sind dies die einzigen Kandidaten für lokale Extremstellen von f.

Wir untersuchen das Verhalten von f in den kritischen Stellen:

i) <u>Zu $(x,y) = (\frac{3}{2},\frac{3}{2})$:</u>
Es gilt

$$\operatorname{Hess} f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix},$$

und wegen $\det\big(\operatorname{Hess} f(\frac{3}{2},\frac{3}{2})\big) = 81 > 0$ und $\partial_1\partial_1 f(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = 9 > 0$ hat f nach Satz 1.13 in $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ ein (strenges) lokales **Minimum** [$\operatorname{Hess} f(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ ist **positiv definit**].

ii) <u>Zu $(x,y) = (\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$:</u>
Es gilt

$$\operatorname{Hess} f\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 18 \end{pmatrix},$$

und wegen $\det\big(\operatorname{Hess} f(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})\big) = 81 > 0$ und $\partial_1\partial_1 f(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = 9 > 0$ hat f nach Satz 1.13 in $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$ ein (strenges) lokales **Minimum** [$\operatorname{Hess} f(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$ ist **positiv definit**].

iii) <u>Zu $(x,y) = (0,0)$:</u>
Hier ist

$$\operatorname{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also $\det \operatorname{Hess} f(0,0) = 0$, also ist zunächst keine Aussage über das Vorliegen eines lokalen Extremums in $(0,0)$ möglich.
Es ist $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,0) = 0^4 - 3x\cdot 0^2 + x^3 = x^3 \begin{cases} > 0, & \text{für } x > 0 \\ < 0, & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

also gibt es für alle $\varepsilon > 0$ in der offenen Kreisscheibe $K_\varepsilon(0,0)$ um $(0,0)$ Punkte (x,y) mit $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ [z.B. $(x,y) = (\frac{\varepsilon}{2},0)$] **und** Punkte (x,y) mit $f(x,y) < 0 = f(0,0)$ [z.B. $(x,y) = (-\frac{\varepsilon}{2},0)$]. Damit hat f kein lokales Extremum in $(0,0)$.

Wir untersuchen nun, ob f globale Extrema besitzt, und betrachten dazu das Verhalten von f auf der x–Achse und erhalten

$$f(x,0) = 0^4 - 3\cdot x\cdot 0^2 + x^3 = x^3 \qquad \text{für alle} \qquad x \in \mathbb{R};$$

wegen

$$f(x,0) = x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ist f nach unten unbeschränkt und damit insbesondere ohne globales Minimum, und wegen

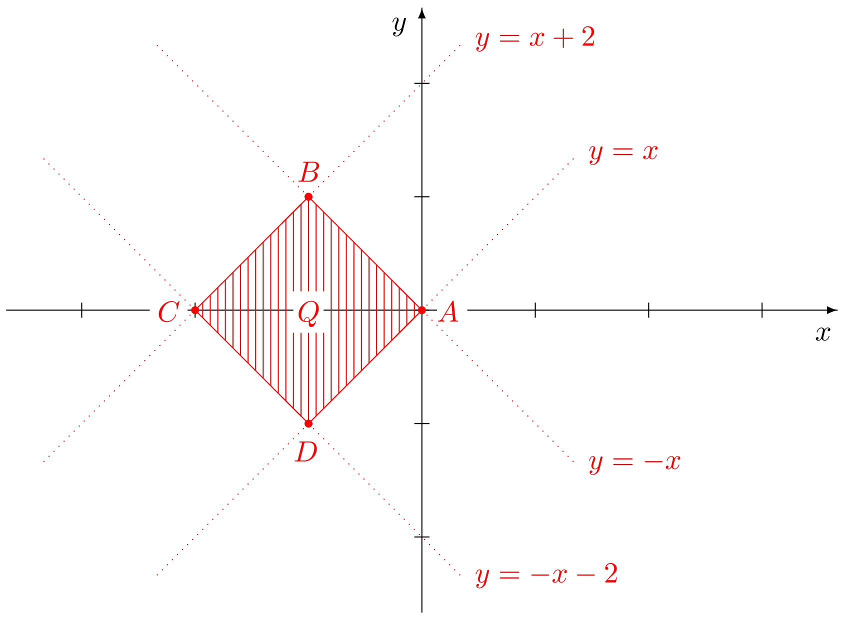
$$f(x,0) = x^3 \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ist f nach oben unbeschränkt und damit insbesondere ohne globales Maximum.

3. Für das abgeschlossene Quadrat $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten

$$A = (0,0), \qquad B = (-1,1), \qquad C = (-2,0) \qquad \text{und} \qquad D = (-1,-1)$$

ergibt sich die folgende Skizze:



Die gegebene Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\, e^{x+y},$$

ist als Produkt und Komposition linearer Funktionen und der Exponentialfunktion stetig und besitzt daher nach dem Satz von Weierstraß auf der abgeschlossenen und beschränkten, also kompakten Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^2$ ein globales Minimum und ein globales Maximum. Zur Ermittlung der globalen Extremstellen von f gehen wir gemäß (1.17) vor und betrachten f getrennt auf ∂Q und auf $\mathring{Q}$:

- <u>Wir untersuchen f auf dem Rand ∂Q:</u>
  * Wir parametrisieren die rechte obere Seite $[AB]$ von ∂Q durch

    $$\varphi : [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t,-t).$$

    Die Funktionswerte von f auf $[AB]$ sind dann gegeben durch

    $$h(t) := f(\varphi(t)) = f(t,-t) = t \cdot e^{t-t} = t, \quad t \in [-1,0].$$

    Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind $\quad t = -1, \quad 0.$
    $\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf $[AB]$ sind also

    $$(x,y) = (-1,1) \ , \ (0,0).$$

  * Wir parametrisieren die linke obere Seite $[BC]$ von ∂Q durch

    $$\varphi : [-2,-1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t, t+2).$$

Die Funktionswerte von f auf $[BC]$ sind dann gegeben durch

$$h(t) := f(\varphi(t)) = f(t, t+2) = t \cdot e^{t+t+2} = te^{2t+2}, \quad t \in [-2, -1].$$

h ist differenzierbar mit

$$h'(t) = 1 \cdot e^{2t+2} + t \cdot 2e^{2t+2} = \underbrace{(1+2t)}_{\leq -1} \cdot \underbrace{e^{2t+2}}_{>0} < 0 \quad \text{für alle } t \in [-2, -1]\,.$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind also $\quad t = -2, \quad -1.$

$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf $[BC]$ sind also

$$(x, y) = (-2, 0) \ , \ (-1, 1).$$

* Wir parametrisieren die linke untere Seite $[CD]$ von ∂Q durch

$$\varphi : [-2, -1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t, -t-2).$$

Die Funktionswerte von f auf $[CD]$ sind dann gegeben durch

$$h(t) := f(\varphi(t)) = f(t, -t-2) = t \cdot e^{t-t-2} = te^{-2}, \quad t \in [-2, -1].$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind $\quad t = -2, \quad -1.$

$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf $[CD]$ sind also

$$(x, y) = (-2, 0) \ , \ (-1, -1).$$

* Wir parametrisieren die rechte untere Seite $[DA]$ von ∂Q durch

$$\varphi : [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t, t).$$

Die Funktionswerte von f auf $[DA]$ sind dann gegeben durch

$$h(t) := f(\varphi(t)) = f(t, t) = t \cdot e^{t+t} = te^{2t}, \quad t \in [-1, 0].$$

h ist differenzierbar

$$h'(t) = 1 \cdot e^{2t} + t \cdot 2e^{2t} = e^{2t} \cdot (1+2t) = 0 \iff t = -\frac{1}{2}.$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind also $\quad t = -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0.$

$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf $[DA]$ sind also

$$(x, y) = (-1, -1) \ , \ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \ , \ (0, 0).$$

- <u>Wir untersuchen f auf dem Innern $\mathring{Q}$:</u>

  f ist auf $\mathring{Q}$ partiell diffbar, also sind nur $(x, y) \in \mathring{Q}$ mit $\operatorname{grad} f(x, y) = (0, 0)$ Kandidaten für eine lokale Extremstelle von f auf $\mathring{Q}$.
  Es ist für $(x, y) \in \mathring{Q}$

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (1 \cdot e^{x+y} + x \cdot e^{x+y}, \underbrace{x}_{<0} \cdot \underbrace{e^{x+y}}_{>0}) \overset{x<0}{\neq} (0, 0).$$

  Damit gibt es auf $\mathring{Q}$ keine kritischen Punkte, und also auch keine Kandidaten für ein lokales Extremum von f auf $\mathring{Q}$.

- <u>Wir vergleichen $f(x, y)$ für die Kandidaten:</u>

  Mit Hilfe der Wertetabelle

(x,y)	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(-2,0)$	$(-1,-1)$	$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$
$f(x,y)$	0	-1	$-2\,e^{-2}$	$-e^{-2}$	$-\frac{1}{2}\,e^{-1}$

  erkennt man, daß f den maximalen Funktionswert 0 im Punkt $(0,0)$ sowie den minimalen Funktionswert -1 im Punkt $(-1,1)$ annimmt.

4. Die zu betrachtende Funktion
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(t) = f\left(t, t^3\right),$$
läßt sich schreiben als $h = f \circ \varphi$ mit
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \left(t, t^3\right);$$
f ist stetig partiell diffbar und die Kurve φ ist diffbar mit $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t),\ \varphi_2'(t)) = (1\ ,\ 3t^2)$. Damit ist auch h diffbar und nach der Kettenregel 1.22 gilt
$$h'(t) = \operatorname{grad} f(\varphi(t)) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f(t, t^3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$
für alle $t \in \mathbb{R}$. Da nun die partiellen Ableitungen 1. Ordnung $\partial_1 f$ und $\partial_2 f$ von f nach Voraussetzung überall positiv sind, ergibt sich weiter
$$\begin{aligned} h'(t) &= \Big(\partial_1 f(t, t^3),\ \partial_2 f(t, t^3)\Big) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \\ &= \partial_1 f(t, t^3) \cdot 1 + \partial_2 f(t, t^3) \cdot \left(3t^2\right) \\ &= \underbrace{\partial_1 f(t, t^3)}_{>0} + \underbrace{\underbrace{3t^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\partial_2 f(t, t^3)}_{>0}}_{\geq 0} > 0 \end{aligned}$$
für alle $t \in \mathbb{R}$; damit ist die Funktion h streng monoton wachsend, besitzt also insbesondere kein lokales Extremum.